2004/3/1
担当: 寺本 進

平成15年度 数学および力学演習G 期末テスト

注意事項

- 試験時間: 12:00〜12:00
- 問題用紙1枚, 答案用紙4枚, 計算用紙1枚
- 全ての答案用紙の先頭に学生証番号および氏名を記入すること

1.

以下の各方程式の一般解および(もしあれば)特異解を求めよ

(1) $y''' - 3y' - 2y = e^x + e^{-x}$

(2) $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$

(3) $2y' + y = (x-1)y^3$

2.

以下の各方程式の一般解を求めよ。括弧内はヒントであるが、他の方法で解いても良い。

(1) $yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0$ (y に関して同次)

(2) $x^2y'' - 2y = x^2$ (余関数の一つは $y = x^2$)

3.

次の連立微分方程式を解け

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - 6y + 2 = 0 \\ 2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + x + 2y = 0 \end{cases}$$

4.

次の微分方程式を、演算子法によりラプラス変換を用いて解け。

$y'' + 4y' + 13y = 2e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

5.

図のように、原点Oを中心として xy 平面内を角速度 ω で回転するバットがある。バットの質量は M, 重心まわりの慣性モーメントは I_G, 回転中心Oから重心Gまでの距離は h である。

今バットが x 軸を通過する瞬間に、y 軸と平行に速度 v で運動する質量 m のボールがバットの点Aに当たったとする。

OAの距離を x, ボールとバットの間の反発係数を e として、以下の問に答えよ。

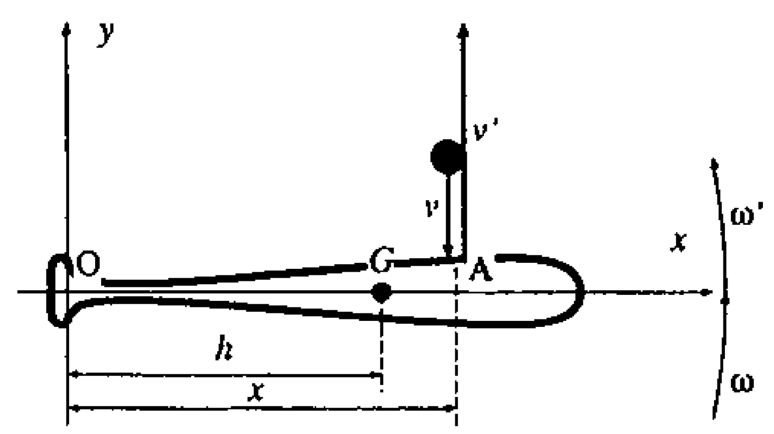

図 1:

(1) 衝突後のボールの速度 v', およびバットの回転角速度 ω' を求めよ

(2) 衝突の瞬間に回転軸に働く抗力の力積を求めよ。またこの力の負担がゼロになるときの点Aの位置を定めよ。

(3) ボールが最大の運動エネルギーで打ち返されるときの点Aの位置を x_0 とすると、関係式

$$E \equiv \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(I_G + Mh^2)\omega^2 = \frac{1}{2}m(v + x_0\omega)^2$$

が成り立つことを示せ。

6.

二つの質点 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ が互いにばね定数 k のばねで連結されて自由に空間を動き回ることができるようになっている。この二つの質点の運動方程式はそれぞれ

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{l}), \qquad m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{l})$$

である。ただし $\vec{l} = l(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ と書いた。このとき

(1) この体系が回転しないと仮定して、質点間平衡距離および平衡位置の付近での二つの質点の振動の周波数を求めよ

(2) この体系が重心を通り振動子の軸に垂直な直線のまわりに角速度 Ω で回転するとき、質点間平衡距離および平衡位置の付近での微小振動の周波数はどのように変化するか

7.

テニスラケットのように、三つの主慣性モーメントが相異なる ($I_\xi \neq I_\eta \neq I_\zeta$, ξ, η, ζ は慣性主軸) 物体の回転運動を、以下の設問に従って論じよ。

(1) オイラー方程式を利用して、物体が定常回転 ($\frac{d\omega_\xi}{dt} = \frac{d\omega_\eta}{dt} = \frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0$) するために $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ が満たすべき条件を求めよ。

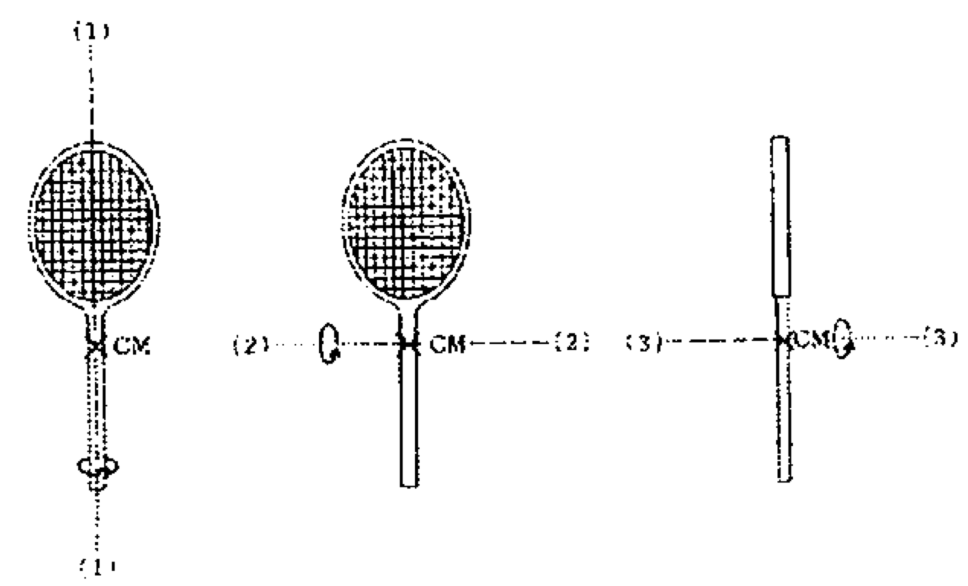

図 2:

$$
\begin{cases}
I_{\xi\xi}\frac{d\omega_\xi}{dt} - (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta})\,\omega_\eta\omega_\zeta = N_\xi \\
I_{\eta\eta}\frac{d\omega_\eta}{dt} - (I_{\zeta\zeta} - I_{\xi\xi})\,\omega_\zeta\omega_\xi = N_\eta \\
I_{\zeta\zeta}\frac{d\omega_\zeta}{dt} - (I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})\,\omega_\xi\omega_\eta = N_\zeta
\end{cases}
$$

(2) 物体が前問で求めた角速度 $((\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) = (\omega_{\xi0}, \omega_{\eta0}, \omega_{\zeta0}))$ で定常回転しているとき、回転数が微小変化して

$$
\begin{cases}
\omega_\xi = \omega_{\xi0} + \varepsilon_\xi \\
\omega_\eta = \omega_{\eta0} + \varepsilon_\eta \\
\omega_\zeta = \omega_{\zeta0} + \varepsilon_\zeta
\end{cases}
$$

になったとして、その後の運動を求め、安定な運動になるための条件を求めよ。

参考: ラプラス変換対応表

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$	$\frac{(a-b)e^{-bt}-(a-c)e^{-ct}}{c-b}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\sinh\omega t$
$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh\omega t$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$
$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$
$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\cos\omega t$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$