

## 平成14年度 数学および力学演習 G 期末テスト

## 注意事項

- 試験時間: 12:30~14:30
- 問題用紙1枚, 答案用紙4枚, 計算用紙1枚
- 全ての答案用紙の先頭に学生証番号および氏名を記入すること
- 「微分方程式」(東京大学応用物理学教室編)のみ持ち込み可

## 1.

以下の各方程式の一般解を求めよ

$$(1) \quad y' + \frac{x^2 - y^2}{2xy} = 0$$

$$(2) \quad x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$$

## 2.

以下の各方程式の一般解を求めよ。括弧内はヒントであるが、他の方法で解いても良い

$$(1) \quad yy'' - (y')^2 - 3y^2 x^2 = 0 \quad (y \text{ に関して同次元。} y^2 \text{ で割ってから変数変換)}$$

$$(2) \quad y' - 2x - y + 2xy^2 + 1 = 0 \quad (y = C \text{ の形の特解を仮定)}$$

## 3.

(1)  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  の極座標表示で、微分方程式  $f\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0$  で与えられる曲線群と角  $\alpha$  で交わる曲線群が満たすべき微分方程式を求めよ。

必要であれば、公式  $\tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 \pm \tan \theta_2}{1 \mp \tan \theta_1 \tan \theta_2}$  を用いよ。

(2)  $\frac{d\theta}{dr} = 0$  で与えられる曲線群と角  $\alpha$  で交わる曲線群が満たすべき微分方程式を求めよ。

(3)  $\frac{d\theta}{dr} = 0$  で与えられる曲線群の等角曲線群を求めよ。

※ (2),(3) の  $\frac{d\theta}{dr} = 0$  は、 $\frac{dr}{d\theta} = 0$  の誤植ではない。

4.

図1のように支点が移動できる振り子がある。重力加速度を  $g$  とし、以下の間に答えよ

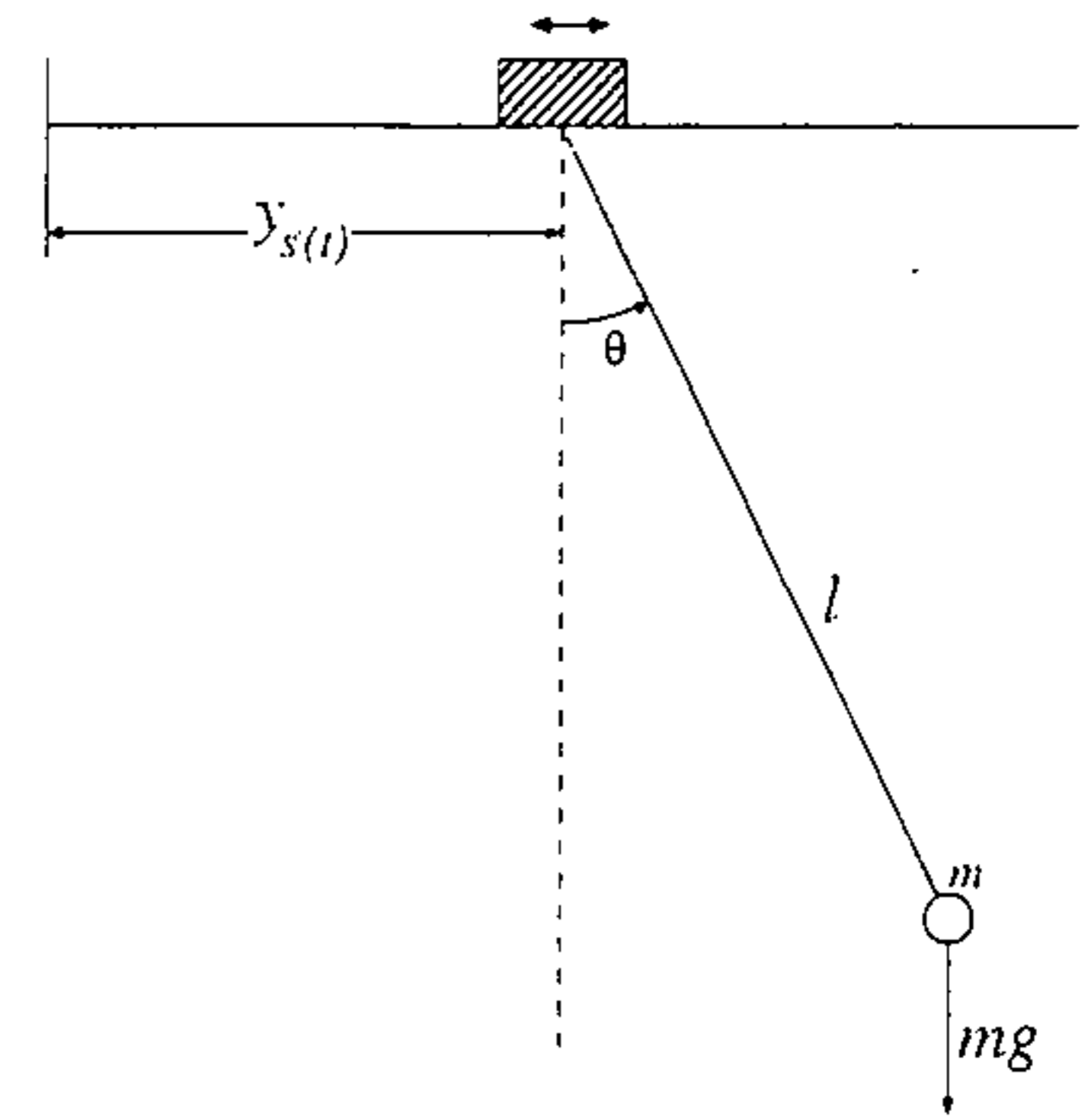


図 1:

(1)  $t < 0$  では支点, おもり共に静止状態で、 $t = 0$  に支点が一定加速度  $a(\frac{d^2 y_s}{dt^2} = a)$  で運動を始めたとして、 $t > 0$  における おもりの運動  $\theta(t)$  を求めよ。振り子の振幅は微小であるとしてよい。

(2) 支点が  $y_s(t) = y_0 \sin \omega t$  で微小振動するときの、おもりの運動  $\theta(t)$  を求めよ。

5.

質量  $\mu$  の粒子が  $V(r)$  ( $r$  は中心からの距離) で与えられるポテンシャル場中を運動している。粒子の初期速度を  $v_0$ , 衝突径数を  $b$ , また中心から見た粒子の方位角を  $\theta$  として以下の間に答えよ。

(1)  $\frac{dr}{dt}$  と  $\frac{d\theta}{dt}$  を距離  $r$  の関数として求めよ。

(2) 粒子の最接近距離  $r_{\min}$  を求めよ。

(3) 粒子の散乱角  $\varphi$  が、
$$\varphi = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2}{\mu v_0^2} V(r)}}$$

で与えられることを示せ。

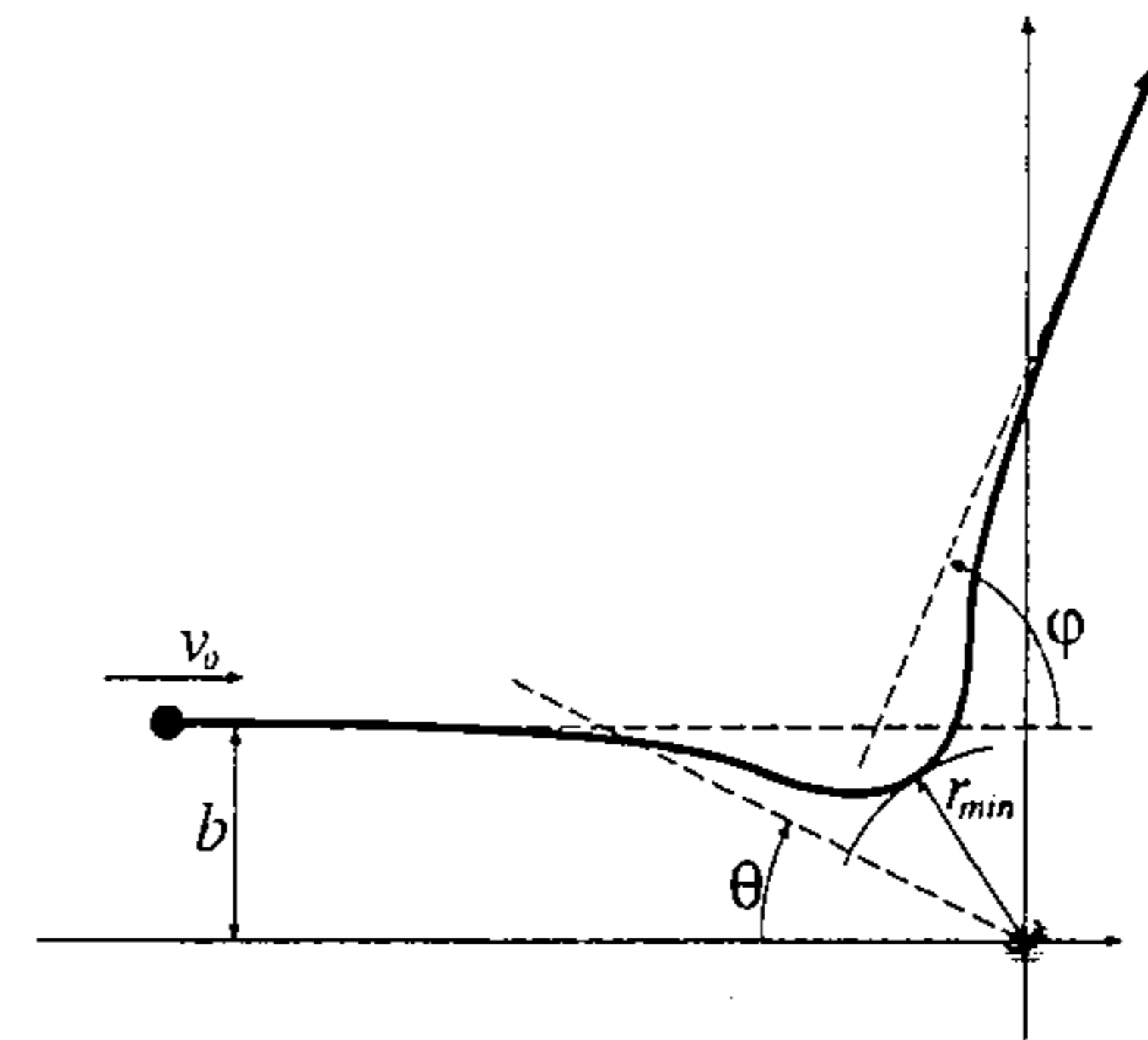


図 2:

6.

図のように、傾斜角  $\alpha$  の斜面を質量  $M$ , 半径  $a$  の一様な円板 (慣性モーメント  $I = \frac{1}{2} M a^2$ ) が転がり落ちている。円板中心の初期位置を座標原点とし、 $x$  軸を斜面と平行、 $y$  軸を垂直方向上向きにとり、以下の間に答えよ。円板と斜面との間の摩擦係数は  $\mu$  とする。

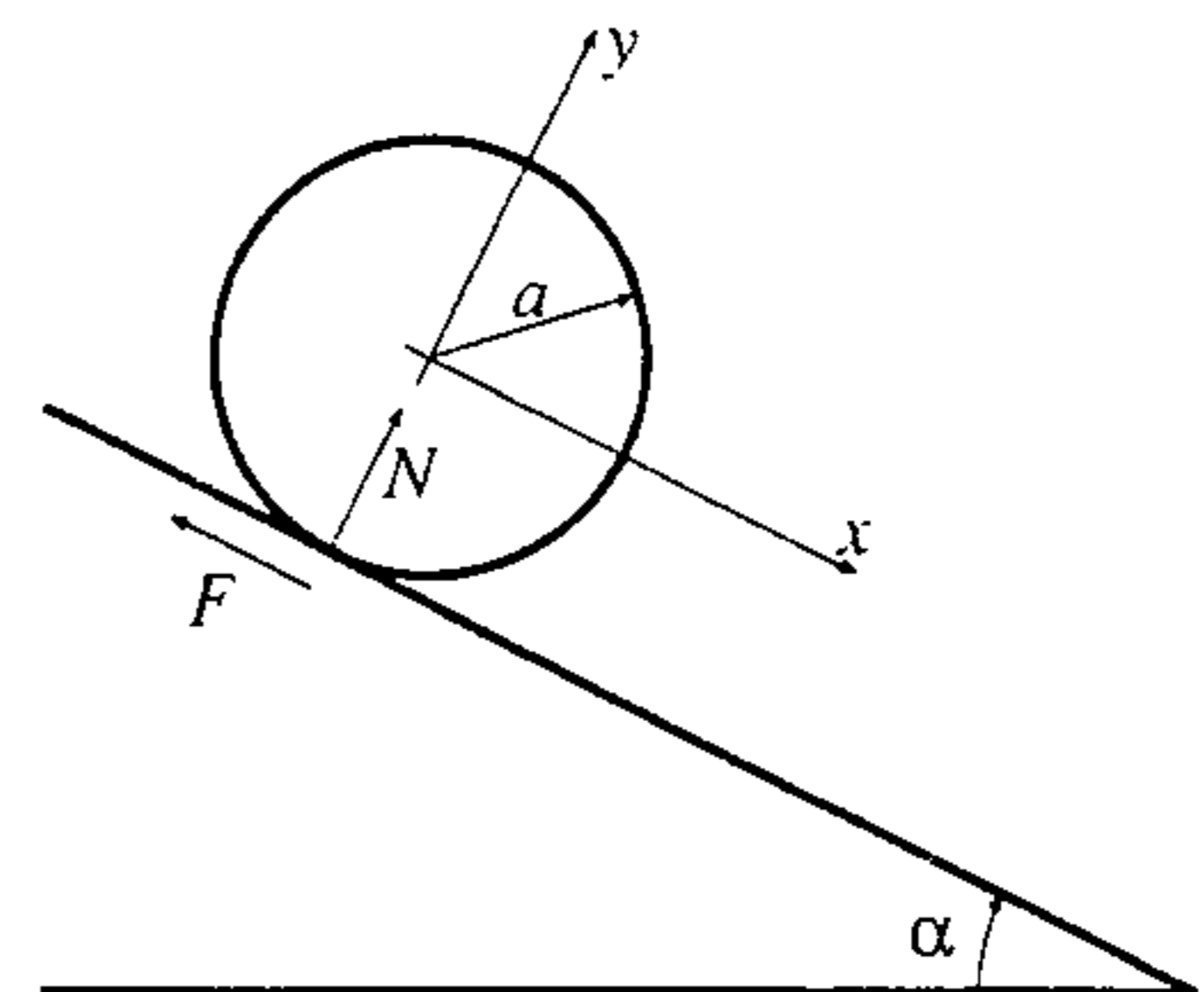


図 3:

(1) 円板が斜面を滑べらずに転がり落ちるためには、どのような条件が必要か。

(2) 円板が斜面を滑べらずに転がり落ちる場合について、円板の運動を求めよ。

(3) 円板が斜面を滑べりながら転がり落ちる場合について、円板の運動を求めよ。